**Mathematical Methods in Earth Sciences**

강의 12 – 2018년 6월 4일

**상미분방정식(ordinary differential equation)**

우리가 구하고자 하는 미지 함수 의 도함수를 포함한 방정식을 미분방정식(differential equations, DE’s)이라 정의한다. 미분방정식은 지구과학에서 널리 이용하며, 가장 간단한 예제로 방사선붕괴율(radioactive decay)을 구하는 것이다. 만약 어떠한 물리량이 시공간에 따라서 변한다면, 이것은 미분방정식으로 표현이 가능하다고 생각하면 된다.

**(예제)** 뉴턴의 제2법칙 를 다음과 같이 표현이 가능하다.

**미분방정식의 종류**

1. 상미분(Oridinary)/편미분(Partial): 상미분은 미지 함수의 독립변수가 하나만 있는 미분 방정식 (예) (미지 함수 의 독립변수는 하나임), 편미분은 미지 함수의 독립 변수가 두 개 이상이 존재하는 미분 방정식 (예) (미지 함수 의 독립 변수는 와 로서 2개)

2. 계수(Order): 미분방정식에 나타난 가장 높은 도함수

**(예제)** 1계 상미분 방정식의 일반적인 형태는 로 예는

**(예제)** 2계 상미분 방정식의 경우 로 예는

3. 차수(Degree): 가장 높은 도함수의 거듭제곱 수

**(예제)** : 1계 1차 미분방정식

**(예제)** : 2계 1차 미분방정식

**(예제)** , 1계 2차 미분방정식

4. 선형성(Linearity): 함수 및 그 도함수 들이 다음과 같을 때 선형이라고 한다.

수식에서 와 는 오직 에 관한 함수이다. 즉, 각각의 항들의 1차 거듭제곱으로 구성된 방정식

**(예제)**

**(예제)** 비선형 미분방정식은 선형이 아닌 경우로, 도함수의 1차 거듭제곱이 아니거나, 계수 가 변수 의 함수로 구성되지 않은 경우의 형태이다. 이번 강의에서는 다루지 않는다.

**미분방정식의 해**

미분방정식을 푼다는 것은 미분방정식을 만족하는 를 찾는 과정이다. 예를 들어 1계 미분 방정식에 대한 해는 적분상수 가 임의 상수로 포함된 경우로 해가 무수히 많다. 이를 일반해(general solution)라 하며, 만약 조건이 부여되어 적분상수가 임의 상수가 아닌 특정한 값을 갖는 경우 이러한 해를 특별해(particular solution)라 한다. 또한 일반해로부터 얻을 수 없는 추가적인 해를 특이해(singular solution)이라 한다. 특별해는 초기조건 또는 경계조건으로 결정할 수 있다.

**(예제)** 은 1계 선형 상미분방정식이다. 해는

이는 적분 상수 를 갖는 일반해이며, 만약에 초기값으로 일 때 이라 하면, 이를 이용하여 특별해를 구할 수 있다.

**(예제)** 미분방정식의 해를 구하시오.

**변수분리형 1계 미분방정식의 해법**

다수의 1계 상미분방정식의 형태는

로, 변수 에 대해 양변으로 위와 같이 정리가 가능하다. 이를 변수분리형(separable) 미분방정식이라 한다.

이런 형태의 해는 다음과 같다.

위의 수식에서 양변의 적분 상수를 하나의 적분상수 로 결합하였다.

**(예제)** 방사선붕괴(radioactive decay)

은 남아있는 방사선원소 개수, 는 시간, 는 감소률(시간에 대한 역수의 단위), 초기값은 이다. 변수분리를 하면,

이것을 어떻게 풀 수 있을까?

**(예제)** 균일한 밀도의 행성 내부 압력이 는 다음과 같다.

는 중력상수, 는 밀도, 은 행성 반경, 는 표면 아래의 깊이이다. 표면 에서 일때, 행성의 중심)에서의 압력을 계산하시오.

**(예제)** 의 일반해를 구하라.

**(예제)** 어란상 석회암(oolites)의 성장은 다음과 같이 모델화할 수 있다.

은 석회암의 반경, 는 성장률(상수, 배경 탄산염의 농도에 의해 결정),는 침식률(반경이 클수록 증가)이다. 일 때인 경우, 시간에 따라서 의 변화가 어떠한지를 보여라.

**적분인자(integrating factor)를 이용한 해법**

변수분리가 가능하지 않을 때 시도하는 방법으로 선형 1계 상미분방정식을 다음과 같이 표준형태(standard form)로 쓸 수 있다고 하자.

위의 식에서 인 경우는 변수분리로 해를 구할 수 있다. 하지만 인 경우는 적분인자를 이용한 방법으로 해를 구할 수 있다. 이 방정식을 풀기 위해서 양변에 적분인자 를 곱하면 표준형태는 다음과 같이 표현할 수 있다.

위의 방정식은 항상 해를 가지며, 이는 오직 선형 1계 상미분방정식에만 적용이 가능하다.

**(예제)** 적분인자를 이용하여 해를 구해보자.

(풀이)

적분인자는 로 양변에 곱하면

일 때 이므로 이다. 따라서 해는

**(예제)** 아래의 방정식은 단순히 변수분리형으로 계산할 수 없다.

**(예제)** 의 일반해를 구하라.

**(예제)** 유체 내 모래의 침적은 뉴턴의 제2법칙으로 모델화할 수 있다. 모래에는 두 개의 힘이 작용하는 데 첫번째는 부력으로 로 표현하며 이는 모래의 아랫방향로 작용하는 힘이다. 두번째는 항력(fluid drag force)으로 로 표현하며, 는 모래의 낙하속도이다. 이 힘은 모래의 윗방향으로 작용한다. 최종 운동방정식은 다음과 같다.